## Ανισότητα Schwarz

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $|a\rangle$ & $|b\rangle \in S$ ισχύει:

$$\|a\| \, \|b\| \geq |\langle b|a\rangle|$$

Ορισμός: Ένα σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\{|x_i\rangle\}_{i=1,..n}$, αποτελεί βάση του δ.χ. S αν για κάθε $|x\rangle \in S$ μπορεί να γραφεί ως γρ. συνδ. των $|x_i\rangle$, δηλ.

$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i\rangle$, $a_i$ συνιστώσες.

## Διαδικασία Gram-Schmidt (G-S)

$\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{n}$, θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}$

$$|e_1\rangle = \frac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}} \quad , \quad |e_2\rangle = N_2(|x_2\rangle + b_2|e_1\rangle)$$

Για το κ+1 ορθ.διαν: $|e_{k+1}\rangle = N_{k+1}\left(|x_{k+1}\rangle + \sum_{i=1}^{k} b_{k+1,i}|e_i\rangle\right)$

$b_{k+1,i} = -\langle e_i/x_{k+1}\rangle$.

Π.χ.

Να κατασκευαστούν τα πολυώνυμα Legendre $P_n(x)$ στο $[-1,1]$

Η βάση μας έχει διανύσματα $|x_i\rangle = x^{i-1}$, $i=1,2,\dots,n+1$

Τότε $\langle x_m|x_n\rangle = \int_{-1}^{1} x^{m-1} \cdot x^{n-1} dx = \int_{-1}^{1} x^{m+1-2} dx$

$$= \begin{cases} \frac{2}{m+n-1} & , m+n \text{ άρτιος} \geq 2 \\ 0 & , m+n \text{ περιττός} \end{cases}.$$

Άρα σε αυτήν την περίπτωση τα πολ/μα δεν είναι ορθοκαν.

$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) = \frac{2}{m+n-1}$ ή $\frac{2}{2n+1} \cdot \delta_{mn}$ (ορισμός)

Παρατήρηση: Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία G-S για να παράγουμε όλα τα γνωστά ορθογ. πολ/μα.

Επιλέγουμε $[a,b]$, $w(x)$, $\int_a^b w(x)[P_n(x)]^n dx = N_n$

Η αρχική βάση $\{|x_i\rangle\}_{i=1}^{N+1}$, $|x_i\rangle = x^{i-1}$, $i=1,2,\dots,N+1$

Διαδικασία G-S.

$$|p_0\rangle = \frac{|x_1\rangle}{\sqrt{\langle x_1|x_1\rangle}} = x^0 = 1$$

$|p_1\rangle = N_2(|x_2\rangle + b_{21}|e_1\rangle$ οπότε με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου. ($|e_1\rangle = |p_0\rangle$)

$\langle p_0|p_1\rangle = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow b_{21} = 0.$

$\langle p_1|p_1\rangle = \langle x_2|x_2\rangle = |N_2|^2$

$(\langle x_2|x_2\rangle + b_{21}\langle x_2|p_0\rangle + b_{21}^*\langle p_0|x_2\rangle + |b_{21}|^2) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow N_2 = 1.$

$|p_1\rangle = |x_2\rangle = x.$

Άρα τα κανονικοποιημένα πολ/μα $P_0(x) = |P_0\rangle = 1$

$P_1(x) = |P_1\rangle = x$

Όμοια το $|P_2\rangle = N(|x_3\rangle + b|x_1\rangle)$

## Η σχέση του Parseval, ανισότητα του Bessel

$|x\rangle \in S$, n-διάστατος $|x\rangle = \sum_{i=1}^n a_i|e_i\rangle$

Έστω ότι σε ένα N-διάστατο χώρο S έχουμε N-ορθοκανονικά διανύσματα $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle$ που σχηματίζουν βάση του S. Τότε κάθε διάνυσμα $|x\rangle \in S$ μπορεί να γραφεί $|x\rangle = \sum_{i=1}^n a_i|e_i\rangle$.

Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τα $a_i$.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε τα $a_i$ με τη βοήθεια εσωτερ. γινομένου.

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο:

$\langle e_m|x\rangle = \langle e_m|\sum_{i=1}^n a_i|e_i\rangle = \langle e_m|(a_1|e_1\rangle + a_2|e_2\rangle + \dots + a_N|e_N\rangle)$

$= a_1\cancelto{0}{\langle e_m|e_1\rangle} + a_2\cancelto{0}{\langle e_m|e_2\rangle} + a_m\cancelto{1}{\langle e_m|e_m\rangle} + \dots + a_N\cancelto{0}{\langle e_m|e_N\rangle}$

$= \sum_{i=1}^n a_i\delta_{im} = a_m$, άρα $a_m = \langle e_m|x\rangle$ και τελικά μπορούμε να γράψουμε $\sum_{i=1}^n \langle e_i|x\rangle|e_i\rangle$, $|x\rangle \in S$.

<u>Ορισμός</u>: Αν το ορθοκανονικό σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ δεν περιέχεται σε άλλο μεγαλύτερο ορθοκανονικό σύστημα τότε καλείται **πλήρες**.
Σε N-διάστατους χώρους ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα αποτελεί **βάση**.

Έστω $|x\rangle, |y\rangle \in S$, $|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle |e_i\rangle$
$|y\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_j|y\rangle |e_j\rangle$.
Τότε $\langle y|x\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle e_j|y\rangle |e_j\rangle \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle |e_i\rangle$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \langle e_j|y\rangle^* \langle e_i|x\rangle \underbrace{\langle e_j|e_i\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|y\rangle^* \langle e_i|x\rangle \quad (2)$$

βάση του ορισμού του εσωτερικού γινομένου $\langle e_j|e_i\rangle$ έχουμε $\langle e_j|y\rangle^*$, αν είχαμε $\langle e_i|e_j\rangle$ τότε θα είχαμε $\langle e_i|x\rangle^*$

Τελικά η σχέση (2) γίνεται:

$$\langle y|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|y\rangle^* \langle e_i|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle y|e_i\rangle\langle e_i|x\rangle \quad (3)$$

Η σχέση (3) ονομάζεται ισότητα του Parseval.

Αν $|x\rangle \equiv |y\rangle$
$\langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\langle e_i|x\rangle|^2$

Αν το ορθοκανονικό σύστημα δεν είναι πλήρες, δηλ. $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ με $n<N$ (N: διάσταση του S) τότε (δεν ισχύει η ισότητα του Parseval). Ισχύει η <u>ανισότητα Bessel</u>. δηλ. $\langle x|x\rangle \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i|x\rangle|^2$.

<u>Παρατήρηση</u>: Η ισότητα ισχύει όταν το σύστημα είναι πλήρες $(n=N)$

<u>Σχέση με την ανισότητα Schwarz</u>

Αν $|x\rangle, |y\rangle \in S$ ισχύει $\|x\|\|y\| \geq |\langle x|y\rangle|^2$ ή $\sqrt{\langle x|x\rangle}\sqrt{\langle y|y\rangle} \geq |\langle x|y\rangle|^2$

Τότε από την ανισότητα Bessel (για n=1) έχουμε:

$$\langle x|x\rangle \geq |\langle e_1|x\rangle|^2 = |\langle y|x\rangle|^2 \cdot \frac{1}{\langle y|y\rangle} \Leftrightarrow$$

$$\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \geq |\langle y|x\rangle|^2 .$$

(**)

Για ένα πλήρες σύστημα ορθοκανονικών διανυσμάτων (βάση) $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots,N}$ ισχύει ότι:

$$\langle x|e_i\rangle = 0, \quad \forall i=1,2,\dots,N \Rightarrow |x\rangle = |0\rangle$$

Απόδειξη

Αφού το $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ είναι πλήρες, ισχύει ότι:

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle |e_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\langle x|e_i\rangle^*}_{"0,\ \forall i=1,2,\dots,N.} |e_i\rangle$$

άρα $|x\rangle = |0\rangle$

π.χ.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)$, $m=1,2,\dots$

Να βρεθούν όλα τα δυνατά εσωτερικά γινόμενα στο $[-\pi,\pi]$

- $\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^* g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(mx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx = 0.$
- $\langle f|n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^* n\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sin(mx)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2mx)\,dx = 0.$
- $\langle g|n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} g^*(x)\,n(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx = 0.$
- $\langle f|f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\,f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(mx)\,dx.$
  $= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2mx)}{2}\right)dx = \dots = 1.$
- $\langle g|g\rangle = \dots$, $\langle n|n\rangle = \dots$

(Αν αυτό αποτελούσε βάση θα ήταν ορθοκανονική)

Μ.Φ. 18/10/2016 

# Διανυσματικοί Χώροι Άπειρης Διάστασης

Πολλές έννοιες που συναντήσαμε στους χώρους πεπερ. διάστασης γενικεύονται σε χώρους άπειρων διαστάσεων.

Νέες έννοιες στους χώρους άπειρης διάστασης:

1) Η σύγκλιση ακολ. διαν. απειρων στοιχείων

2) Η έννοια της πληρότητας των δ.χ.

## Γενικές Έννοιες

Ο δ.χ. $\mathbb{V}$ είναι άπειρων διαστάσεων όταν ο αριθμός των γρ. ανεξ. διανυσμάτων του δεν είναι πεπερασμένος, $N \to \infty$

π.χ.

Ο χώρος F, των συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$

Σ' αυτόν τον χώρο τα διανύσματα $|f\rangle$ ξ' $|g\rangle$ αναπ.

$f(x)$ ξ' $g(x)$, $x \in [a,b]$. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x)\, f^*(x)\, g(x)\, dx.$$

$w(x)$ = πραγματική, θετική και συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ η οποία καλείται συνάρτηση πυκνότητας ή βάρους.

Στο χώρο, F, ορίζονται ορθοκανον. διανύσματα $|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_k\rangle$ που αντιστοιχ. στις ορθοκανονικές συναρτήσεις $e_1(x), e_2(x), \dots, e_k(x)$. που έχουν την ιδιότητα

$$\langle e_k|e_m\rangle = \int_a^b w(x) \cdot e_k^*(x) \cdot e_m(x)\, dx. = \left\{ \begin{matrix} 1 & k=m \\ 0, & k\neq m \end{matrix} \right\} = \delta_{km}$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz, για τον δ.χ., F, θα είναι

$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle \langle g|g\rangle.$$

$$\left|\int_a^b f^*(x)\, g(x)\, w(x)\, dx\right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 w(x) \int_a^b |g(x)|^2 w(x)\, dx$$

Η απόσταση ρ, μεταξύ 2 διανυσμάτων $|f\rangle$ & $|g\rangle$ ορίζεται ως:

$$\rho(|f\rangle, |g\rangle) = \sqrt{(\langle f| - \langle g|)(|f\rangle - |g\rangle)}$$

Αν ο δ.χ. είναι ο F τότε:

$$\rho^2(|f\rangle, |g\rangle) = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 w(x)\, dx$$

ή $$\rho(|f\rangle, |g\rangle) = \int_a^b (|f(x) - g(x)|^2 w(x))^{1/2} dx$$

<u>Ορισμός</u> Θα λέμε ότι μια ακολουθία διανυσμάτων $|f_n\rangle$ **συγκλίνει** σ'ένα διάνυσμα $|f\rangle$ αν-ν

$$\lim_{n\to\infty} \rho(|f_n\rangle, |f\rangle) = 0.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η σύγκλιση αυτή λέγεται μέση σύγκλιση ή ισχυρή σύγκλιση ή μέση τιμή.